Программа вступительного испытания
«Математика»
при приеме на обучение по программе магистратуры
«Воспитание математических талантов»
по направлению подготовки 01.04.01 Математика

БЛОК 1. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Математический анализ и топология

1. Множества. Операции над множествами. Отображения. Типы отображений: инъекция, сюръекция, биекция.
2. Метрические пространства и непрерывность. Понятие метрики, открытые и замкнутые множества. Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Полнота. Непрерывные отображения и их свойства на компактах (теоремы Вейерштрасса).
3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Дифференцируемость и дифференциал. Асимптотические оценки (О-большое и о-малое). Формула Тейлора и локальное приближение функций.
4. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Частные производные и дифференциал. Градиент и производная по направлению. Касательная плоскость. Экстремумы функций многих переменных (безусловные и условные, метод множителей Лагранжа).
5. Интегральное исчисление. Определенный интеграл (Римана). Критерий интегрируемости. Связь дифференцирования и интегрирования (формула Ньютона-Лейбница). Несобственные интегралы. Приложения интеграла.
6. Ряды. Числовые ряды: необходимые и достаточные признаки сходимости. Функциональные последовательности и ряды: поточечная и равномерная сходимость. Степенные ряды в действительной и комплексной области (радиус сходимости, теорема Абеля).

Линейная алгебра и геометрия

6. Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость систем векторов. Базис и размерность линейного пространства.
7. Линейные операторы. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен. Инвариантные подпространства. Диагонализуемость операторов.
8. Евклидовы пространства. Скалярное произведение, норма, угол. Неравенство Коши-Буняковского.

9. Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Приведение к каноническому виду (метод Лагранжа или ортогональное преобразование). Закон инерции. Положительно определенные формы (критерий Сильвестра).
10. Аналитическая геометрия. Прямые и плоскости в аффинном пространстве. Взаимное расположение, углы и расстояния. Кривые и поверхности второго порядка: классификация, канонические уравнения и геометрические свойства.

Алгебра и теория чисел

11. Базовые алгебраические структуры. Группы, кольца, поля (определения, примеры, простейшие свойства). Подгруппы, смежные классы, теорема Лагранжа. Гомоморфизмы и изоморфизмы.
12. Кольцо многочленов. Делимость многочленов, НОД, алгоритм Евклида. Корни многочлена, кратность корня. Теорема Безу. Основная теорема алгебры.
13. Комплексные числа. Поле комплексных чисел. Геометрическая интерпретация. Тригонометрическая форма, формула Муавра. Корни n-й степени из единицы.
14. Элементы теории чисел. Делимость в кольце целых чисел. Простые числа, основная теорема арифметики. Сравнения по модулю. Кольцо вычетов. Теоремы Ферма и Эйлера.

Дискретная математика и теория вероятностей

15. Основные комбинаторные конфигурации (сочетания, размещения). Биномиальные коэффициенты и их свойства. Формула включений-исключений.
16. Элементы теории графов. Основные понятия (вершины, ребра, степень, изоморфизм). Связность, компоненты связности. Деревья (свойства деревьев). Эйлеровы пути и циклы. Планарные графы.
17. Основы теории вероятностей. Вероятностное пространство (элементарные исходы, события). Классическое и геометрическое определение вероятности. Условная вероятность, теоремы сложения и умножения. Формула полной вероятности и формула Байеса. Независимость событий.
18. Случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Функция распределения и плотность. Числовые характеристики: математическое ожидание и дисперсия (свойства). Неравенство Чебышева. Закон больших чисел.

БЛОК 2. БАЗОВАЯ ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Логические методы и Текстовые задачи
    - Истинные и ложные утверждения: Задачи про рыцарей и лжецов. Противоречия в показаниях.

- Принцип Дирихле: Основная форма, обобщенный принцип, геометрический принцип Дирихле.
- Метод «от противного».
- Правило крайнего (принцип экстремума).
- Принцип «Оценка + Пример» (доказательство достижимости минимума/максимума).

2. Целые числа и Арифметика
   - Делимость и остатки. Признаки делимости (в том числе на 4, 8, 9, 11).
   - Арифметика остатков: Понятие циклов, последние цифры степеней.
   - Простые и составные числа. Основная теорема арифметики.
   - НОД и НОК. Алгоритм Евклида.
   - Десятичная запись числа: Числовые ребусы и криптарифмы.
3. Наглядная геометрия и пространственное мышление
   - Разрезания фигур на равные части. Полимино и пентамино .
   - Паркеты и покрытия.
   - Задачи на клетчатой бумаге (формула Пика — опционально, но полезно).
   - Пространственное воображение: Развертки куба, игральная кость, виды многогранника (проекции).
   - Простейшие геометрические места точек (ГМТ). Неравенство треугольника.
4. Графы (Начальный уровень)
   - Понятие графа. Вершины, ребра, степень вершины. Лемма о рукопожатиях.
   - Связность. Компоненты связности, мосты.
   - Эйлеровы пути и циклы (графы, которые можно нарисовать одним росчерком).
   - Деревья.
   - Двудольные графы (на начальном уровне — как инструмент решения задач).
5. Алгоритмы и процессы
   - Взвешивания: Поиск фальшивой монеты, сортировка грузов.
   - Переливания: Задачи с сосудами.
   - Переправы и разъезды: Алгоритмическое планирование действий.
   - Метод инвариантов (четность, раскраска) и полуинвариантов.
6. Комбинаторика и элементы теории вероятностей
   - Правила подсчета: Правило суммы и правило произведения.
   - Перестановки и сочетания (на уровне понимания, без громоздких формул).
   - Треугольник Паскаля и его свойства
7. Игровые стратегии

- Игры с полной информацией. Понятие выигрышной стратегии.
- Симметрия в играх. Парные стратегии.
- Анализ игры с конца (ретроспективный анализ).

БЛОК 3. УГЛУБЛЕННАЯ ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Алгебраические преобразования и многочлены
   - Преобразования: Разложение на множители, бином Ньютона.
   - Многочлены: Теорема Безу, схема Горнера, теорема Виета (для n-й степени).
   - Интерполяция: Интерполяционный многочлен Лагранжа.
   - Специальные многочлены: Многочлены Чебышева (основные свойства).
2. Неравенства (Продвинутые методы)
   - Классические неравенства: Коши, Коши-Буняковского-Шварца, Гёльдера.
   - Методы: Метод перегруппировки и неравенство Чебышева для сумм.
   - Выпуклость: Неравенство Иенсена и использование выпуклости функций.
   - Специальные методы: Неравенство Мюрхеда и метод Штурма (базовые представления).
3. Теория чисел (Арифметические функции и структура)
   - Уравнения: Линейные диофантовы уравнения. Китайская теорема об остатках.
   - Сравнения: Малая теорема Ферма и теорема Эйлера. Порядок элемента, первообразные корни.
   - Квадратичные вычеты: Символ Лежандра. Квадратичный закон взаимности.
   - p-адическая нормировка: Показатели вхождения простого множителя в факториал (формула Лежандра). Лемма о поднятии показателя (LTE).
4. Олимпиадная геометрия
   - Классические теоремы: Теоремы Чевы и Менелая (в том числе тригонометрическая форма).
   - Метрические соотношения: Вписанные углы, степень точки, радикальные оси и центры.
   - Геометрические преобразования: Гомотетия (композиции гомотетий). Инверсия: сохранение углов, перевод окружностей в прямые. Применение инверсии к задачам (теорема Птолемея, задача Аполлония).
   - Элементы проективной геометрии: Двойное отношение, гармонические четвёрки. Полюса и поляры .
5. Функциональные уравнения
   - Метод подстановок. Уравнение Коши и сводимые к нему.

- Свойства функций: Использование монотонности, непрерывности, инъективности/сюръективности.
- Уравнения на дискретных множествах: Целые и натуральные числа.

6. Дискретная математика (Графы и Комбинаторика)
   - Двудольные графы. Паросочетания. Теорема Холла и теорема Кёнига.
   - Планарность: Планарные графы. Формула Эйлера.
   - Раскраски: Хроматическое число. Теорема Турана (о графах без треугольников).
7. Метод производящих функций
   - Основы: Формальные степенные ряды.
   - Рекурренты: Решение линейных рекуррентных соотношений с помощью производящих функций.
   - Классические задачи: Задача о размене монет и разбиениях числа.
   - Числа Каталана: Комбинаторный смысл и вывод формулы.
8. Комбинаторная геометрия
   - Выпуклые множества: Теорема Хелли (о пересечении), выпуклые оболочки.
   - Покрытия: Задачи на покрытие и замощение.
   - Точки и прямые: Теорема Сильвестра (о прямых и точках) и теорема Шпернера.
9. Элементы теории групп в комбинаторике
   - Действие группы на множестве. Орбиты и стабилизаторы.
   - Подсчет орбит: Лемма Бернсайда.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1. Собеседование проводится в форме устного экзамена по билетам.

2. Каждый экзаменационный билет включает три задания, проверяющих разные уровни математической компетентности абитуриента: академическую базу, педагогический потенциал (базовая олимпиадная математика) и профессиональное мастерство (углубленная олимпиадная математика).

Состав билета:

1. Теоретический вопрос по фундаментальной математике (40 баллов)
   - Содержание: вопрос из Блока 1 (Математический анализ, Алгебра, Геометрия и др.).
   - Требования к ответу: абитуриент должен не только дать строгие определения и провести доказательство теоремы, но и раскрыть математический контекст: объяснить место данного понятия в общей

теории, его связи со смежными разделами или привести примеры его практического применения (в науке, технике или IT).

2. Задача по базовой олимпиадной математике (30 баллов)

– Содержание: задача уровня 5–8 классов из Блока 2 (Логика, Графы, Конструкции).
– Требования к ответу: задача должна быть решена безупречно логически. Дополнительно оценивается методическая часть: абитуриент должен представить решение так, как он объяснял бы его школьникам на кружке (доступность, наглядность, выделение ключевых идей).

При ответе на вопрос абитуриент должен быть готов к обсуждению следующих вопросов:

– какая математическая идея лежит в основе решения задачи;
– какие затруднения могут возникнуть у обучающегося и как их можно предотвратить или преодолеть;
– какие вспомогательные упражнения (2–3 задачи) можно предложить для подготовки к решению;
– каково место задачи в системе обучения (возраст/класс, тема, тип занятий: урок или дополнительный курс);
– как методически грамотно объяснить решение задачи с учетом уровня подготовки учеников.

3. Задача по углубленной олимпиадной математике (30 баллов)

– Содержание: задача уровня 9–11 классов или студенческих олимпиад из Блока 3 (Продвинутые методы).
– Требования к ответу: оценивается владение специальным математическим аппаратом и техникой решения сложных задач. Ответ должен содержать анализ метода: почему сработал именно этот подход, какие эвристики использовались, как можно обобщить задачу.

При ответе на этот вопрос абитуриент должен быть готов высказать мнение по следующим вопросам:

– С какими другими разделами математики или типами задач связана данная задача?
– Может ли данная задача быть адаптирована для более младшего возраста/раннего этапа обучения;

а) если да, то как (переформулирована/дополнена/разделена на составляющие/предложена после серии вспомогательных задач);

б) если нет, то почему?

- При решении каких прикладных задач она может быть использована?

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Результаты вступительного испытания оцениваются по 100-балльной шкале.

№	Задание	Баллы	Что оценивается
1	Теоретический вопрос (Блок 1)	40	Глубина понимания фундаментальной математики, знание определений, умение проводить строгие доказательства, владение математическим языком.
2	Базовая задача (Блок 2)	30	Логическая культура, умение решать классические задачи (графы, логика, инварианты), ясность изложения.
3	Углубленная задача (Блок 3)	30	Владение продвинутыми методами (производящие функции, проективная геометрия, теория чисел), креативность, способность довести сложное решение до конца.

Детализация критериев

Вопрос 1. Теория (0–40 баллов)

- 35–40 баллов: полный исчерпывающий ответ. Сформулированы все определения, теорема доказана строго, без наводящих вопросов.
- 25–34 балла: ответ правильный, но доказательство содержит пробелы, которые абитуриент устраняет с помощью наводящих вопросов.
- 15–24 балла: знание формулировок есть, но доказательство не проведено или содержит принципиальные ошибки.
- 0–14 баллов: Незнание базовых определений, отказ от ответа.

Вопрос 2. Базовая задача (0–30 баллов)

- 25–30 баллов: задача решена верно, решение изложено четко, логично и доступно (уровень объяснения для школьника).
- 15–24 балла: ответ верный, но обоснование сбивчивое или содержит мелкие логические недочеты.
- 5–14 баллов: решения нет, но продемонстрировано верное понимание условия и сделаны первые шаги (найден пример/контрпример).
- 0–4 балла: неверное решение или его отсутствие.

Вопрос 3. Углубленная задача (0–30 баллов)

- 25–30 баллов: полное строгое решение, рассмотрены все случаи, продемонстрировано владение специальными методами.
- 15–24 балла: верная идея найдена (например, «нужно использовать инверсию» или «рассмотрим инвариант»), но техническая реализация не доведена до конца.
- 5–14 баллов: есть содержательные продвижения, но путь к ответу не найден.
- 0–4 балла: задача не решена.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

К блоку 1.

Основная литература:

1. Зорич В.А. Математический анализ. Часть I и II. Классический университетский курс. Идеально покрывает разделы «Математический анализ и Топология», а также функции многих переменных и метрические пространства.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть I (Основы алгебры) и Часть II (Линейная алгебра). Базовый учебник МГУ. Содержит исчерпывающие ответы по разделам «Линейная алгебра», «Алгебраические структуры» (группы, кольца, поля), «Многочлены» и «Комплексные числа».
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. Стандартный курс для подготовки вопросов по геометрии (прямые, плоскости, кривые второго порядка).
4. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. Доступное изложение вопросов по комбинаторике.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. Классический учебник, доступно излагающий основы теории вероятностей.

Дополнительная литература:

6. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. (Альтернатива Зоричу, более классическое изложение).
7. *Винберг Э.Б.* Курс алгебры. (Отличный современный учебник, хорошо покрывает темы групп и симметрий).
8. *Бухштаб А.А.* Теория чисел. (Для углубленной подготовки по теории чисел).
9. *Новиков Ф.А.* Дискретная математика для программистов. (Хорошо покрывает теорию графов и алгоритмические аспекты).
10. *Ширяев А.Н.* Вероятность-1. (Для углубленного понимания вероятностных пространств).

К блоку 2.

1. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. «Библия» кружкового движения. Идеально покрывает темы логики, четности, графов и игр.
2. Спивак А.В. Математический кружок. 6-7 классы. Отличный задачник с подробными разборами и методическими комментариями.
3. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. Книга, фокусирующаяся именно на идеях и методах решения (инварианты, раскраски).
4. Кноп К.А. Азы теории чисел (серия «Школьные математические кружки»). Лучшее введение в арифметику остатков.

К блоку 3.

1. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. (Особенно главы про инверсию, проективные преобразования и гомотетию).
2. Ландо С.К. Лекции о производящих функциях. (Лучшее введение в тему производящих функций, доступное сильному студенту).
3. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. (Главы про рекуррентные соотношения и производящие функции).
4. Яглом И.М., Болтянский В.Г. Выпуклые фигуры. (Классика по комбинаторной геометрии — теоремы Хелли, Радона).
5. Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. (Для разделов про первообразные корни и символы Лежандра).
6. Энгель А. Проблемные стратегии (Problem-Solving Strategies). (Покрывает большинство тем, включая инверсию и инварианты).
7. Акопян А.В. Геометрия в картинках. (Современный задачник, содержащий много красивых фактов проективной геометрии).

Председатель экзаменационной комиссии В.В. Бучацкая